DOPPIOZERO

Perfect rigor. Storia di un genio

Claudio Bartocci
19 Febbraio 2019

L'11 novembre 2002 fu postato nella sezione di geometria differenziale di arXiv – l'archivio elettronico che dall'inizio degli anni '90 raccoglie la maggior parte degli e-print di fisica, matematica, informatica, astronomia e altre scienze "dure" – un articolo di 39 pagine dal titolo enigmatico, almeno per i profani: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. L'abstract, sobrio e tecnico com'è nello stile di questo genere di testi, ma in stile discorsivo e senza formule, si chiudeva con un'affermazione a sorpresa: "si fornisce […] l'abbozzo di una 'dimostrazione eclettica'" della congettura di geometrizzazione di Thurston. Il risultato annunciato si presentava tanto più clamoroso per il fatto che, com'era noto agli addetti ai lavori, la validità della congettura di Thurston aveva come conseguenza la validità della celebre congettura di Poincaré, un rompicapo che teneva in scacco i matematici da circa un secolo e che per la sua importanza teorica era stato recentemente inserito nella lista dei "Millennium Problems" del Clay Institute, la soluzione di ciascuno dei quali, oltre al lustro e alla fama, comportava anche un premio in denaro pari a un milione di dollari. L'autore dell'articolo, un matematico russo di 36 anni, rispondeva al nome di Grigorij Jakovlevi? Perel'man.

Ma che cosa sono la congettura di Poincaré e quella di Thurston? E, soprattutto, perché mai dovremmo occuparci di problemi che, in tutta evidenza, hanno a che vedere soltanto con le rarefatte astrusità della matematica? Quale interesse, oltre alla curiosità spicciola, potrebbe avere la figura di Grisha Perel'man?

Non ha incertezze nel dare risposta alle ultime due domande Masha Gessen – giornalista, scrittrice e attivista per i diritti LGBT – nel suo libro *Perfect rigor. Storia di un genio e della più grande conquista matematica del secolo* (traduzione, purtroppo non ineccepibile, di Olimpia Ellero, Carbonio Editore, 2018, pp. 250). In primo luogo – ci spiega l'autrice – riuscire a risolvere un problema matematico di riconosciuta difficoltà, come uno di quelli proposti dal Clay Institute, rappresenta già di per sé un'"impresa eroica". In effetti, se dobbiamo dar credito a un'autorità in materia quale Alain Connes (vincitore della prestigiosa medaglia Fields nel 1982), la matematica stessa deriverebbe il suo "grande valore" proprio dall'"immensa difficoltà di tali problemi, che rappresentano l'Everest o l'Himalaya di questa disciplina". In secondo luogo, per quel che concerne il personaggio Perel'man, costituirebbe motivo d'interesse non solo l'eccezionalità del risultato (come ci è riuscito e "cosa c'è nella sua mente che lo differenzia da tutti i matematici che l'hanno preceduto?"), ma soprattutto la conclamata bizzarria del suo comportamento. Il matematico russo, infatti, ha rifiutato tutti i riconoscimenti che gli sono stati attribuiti (compresi la medaglia Fields del 2006 e il milione di dollari del Clay Institute) e ha perfino abbandonato, nel 2005, il suo posto di ricercatore all'istituto Steklov di San Pietroburgo, interrompendo dapprima ogni contatto scientifico e succesivamente anche ogni comunicazione con la stampa (il che – è doveroso riconoscerlo – non ha certo reso agevole il lavoro di ricostruzione biografica di Masha Gessen).

Questa impostazione – lo dico con franchezza – non mi convince affatto, né relativamente alla concezione che si potrebbe definire "eroico-alpinistica" della matematica (del resto piuttosto popolare, anche tra gli specialisti) né in rapporto alla prospettiva adottata dall'autrice nella sua interpretazione della vicenda umana di Perel'man. La prima mi pare riduttiva, la seconda fuorviante. Provo a spiegare il mio punto di vista,

cominciando dalla matematica.

È quasi fin troppo ovvio ricordare che la matematica costituisce una componente imprescindibile della cultura umana. Dai tempi degli scribi paleo-babilonesi fino alla nostra epoca informatizzata e globalizzata, tra gli antichi Greci così come nelle civiltà classiche dell'India o della Cina, nel mondo islamico dei secoli d'oro e nell'Occidente latino, le idee matematiche – esito di lunghi processi di trasformazione e di ibridazione culturale – si sono sviluppate non già in uno splendido isolamento, bensì in continuo dialogo con le altre forme di conoscenza – la filosofia, le scienze naturali, la letteratura, la musica, le arti figurative, la teologia. Concepire la matematica come un'impresa sportiva (o ludica) che consiste principalmente nello sciogliere cervellotici enigmi paragonabili a vette impervie da scalare è indice non di miopia, ma di completa cecità: significa chiudere gli occhi su quattromila anni di storia. Quantunque risulti arduo, se non impossibile, dire con precisione che cosa sia la matematica – cioè, circoscrivere i suoi confini in base a rigidi criteri di demarcazione –, di sicuro essa non si riduce *sic et simpliciter* a un'attività che si compie unicamente rispettando certe regole e per conseguire certi obiettivi (come l'alpinismo o gli scacchi, entrambi peraltro nobilissimi passatempi). Seppure sia senza dubbio anche una pratica (al pari della pittura o della poesia), infatti, la matematica costituisce soprattutto un *pensiero*, in quanto crea – o, se si preferisce, inventa – rappresentazioni del mondo: rappresentazioni distorte, certamente, ma in qualche modo intelligibili e parlanti.

Veniamo ora alle congetture di Poincaré e di Thurston. La prima venne formulata dal matematico francese nel 1904 nell'ambito del suo vasto e ambizioso programma di rifondazione della topologia. Questa disciplina matematica – che vide la luce nel XVIII secolo, con il nome di *analysis situs*, allo scopo di risolvere problemi relativi ai grafi – subì una profonda trasformazione dopo la pubblicazione, nel 1847, delle *Vorstudien zur Topologie* (*Studi preliminari alla topologia*) di Johann Benedict Listing e soprattutto dopo i lavori di Bernhard Riemann. La questione fondamentale al centro di molte delle ricerche di Riemann era quella di *spazio*. A questo proposito, i matematici, fino all'inizio dell'Ottocento, non si erano spinti molto più in là della teoria assiomatica sviluppata da Euclide nei suoi *Elementi*: era quello euclideo, per Newton così come per Kant, l'unico modello possibile di spazio (ed è ancora l'unico che oggi si studi a scuola). Le innovative idee di Gauss sulla curvatura delle superfici e l'invenzione delle geometrie non euclidee, però, modificarono completamente la prospettiva teorica. Gli "spazi" (detti, tecnicamente, varietà) introdotti da Riemann nella sua lezione di abilitazione del 1854 sono euclidei solo su scala locale e possono estendersi in un numero arbitrariamente grande di dimensioni e avere le caratteristiche più diverse: curvi o piatti, limitati o illimitati, omogenei o non omogenei. Si tratta di una vera e propra rivoluzione – non soltanto matematica, ma concettuale – che avrà profonde ripercussioni, dirette e indirette, sulla fisica, sulla filosofia e anche sull'arte e sulla letteratura.

Opera di KangHee Kim.

Uno dei primi obiettivi della topologia della seconda metà dell'Ottocento fu quello di "classificare" gli spazi contemplando la possibilità di deformarli liberamente, come se fossero fatti di plastilina, ma senza strappi né incollature, cioè, come si dice più precisamente, in modo continuo. Da questo punto di vista, tutte le curve chiuse semplici (per esempio, un quadrato e una circonferenza) sono indistinguibili. Ma non così accade per le superfici (spazi a due dimensioni): una ciambella non potrà mai essere trasformata in modo continuo in una sfera, perché il buco sopravvive a ogni deformazione. Grazie ai contributi dello stesso Riemann e di altri matematici, quali August Ferdinand Möbius, Camille Jordan e William Kingdon Clifford, si riuscì, nel volgere di due decenni, a ottenere e perfezionare un non facile teorema di classificazione delle superfici chiuse: lo strumento chiave per arrivare alla dimostrazione di questo risultato è un "invariante topologico" (il cosiddetto genere), vale a dire un qualcosa (un numero, nel caso in questione) che non cambia quando si effettuano deformazioni continue. Tale metodo, tuttavia, non risulta efficace per classificare gli spazi di dimensione superiore a due. Come orientarsi nella sconfinata vastità dell'universo geometrico dischiuso da Riemann?

Nella grandiosa memoria "Analysis situs" del 1895 e nei cinque successivi "Compléments", l'ultimo dei quali pubblicato nel 1904, Henri Poincaré indagò per primo la topologia degli spazi tridimensionali. Al pari di un viaggiatore che si avventuri in un continente sconosciuto, il matematico francese procedette non soltanto formulando definizioni e teoremi, ma anche costruendo esempi e controesempi in maniera quasi-empirica, in accordo a quella che Imre Lakatos avrebbe denominato "logica delle dimostrazioni e delle confutazioni". In queste esplorazioni, la sua bussola fu un nuovo invariante topologico, da lui appositamente inventato: il gruppo fondamentale. Questo invariante nasce dall'idea, semplice ma geniale, di prendere in esame le curve chiuse, cioè i lacci, contenuti nello spazio che si intende studiare. Su una sfera è sempre possibile "trasformare" due lacci qualsiasi l'uno nell'altro, mentre nel caso di una ciambella, si possono trovare due lacci non equivalenti. Poincaré dimostrò che superfici chiuse sono indistinguibili dal punto di vista topologico se e solo se hanno lo stesso gruppo fondamentale, ma scoprì anche che il gruppo fondamentale non è sufficiente a classificare gli spazi tridimensionali. Così, a conclusione del "Cinquième complément", pose, quasi *en passant*, una domanda naturale e all'apparenza innocua: "È possibile che il gruppo fondamentale di [una varietà tridimensionale chiusa] V si riduca alla sostituzione identica e che tuttavia V non sia semplicemente connessa?". In termini equivalenti: l'ipersfera a tre dimensioni (impossibile da visualizzare!) è l'unica varietà tridimensionale chiusa nella quale tutti i lacci si possono trasformare l'uno nell'altro?

Questa è la famosa congettura di Poincaré: non un rompicapo fine a se stesso, o una metaforica montagna da scalare, ma un fondamentale nodo teorico da sciogliere per ottenere una soddisfacente classificazione delle varietà di dimensione tre e, di conseguenza, per chiarificare il concetto stesso di spazio. I tentativi di risolverla che si sono succeduti per oltre un secolo – fino a Perel'man, appunto – hanno dato origine a nuove idee, e queste ultime a nuovi problemi, con un effetto a cascata che è caratteristico della inesauribile fecondità interna della matematica.

La prima mossa dei matematici fu di generalizzare il quesito di Poincaré al caso di ipersfere di dimensione qualunque. Si tratta di un procedimento piuttosto comune, tipico non solo della matematica, ma anche del pensiero filosofico (e, più in generale, di tutte le investigazioni, teoriche o meno che siano): allargare la visuale, ampliare lo scenario, nella speranza di riuscire a individuare un qualche elemento cruciale – un dettaglio, un indizio – che era rimasto invisibile nelle ricerche precedenti. Per quanto ciò possa sembrare contrario all'intuizione, la congettura ebbe la sua prima conferma per ipersfere di dimensione superiore o uguale a 5, grazie a un teorema dimostrato da Stephen Smale nel 1960; vent'anni dopo, nel 1982, Michael Freedman ottenne il risultato in dimensione 4 come corollario di un suo più generale teorema di classificazione delle varietà quadridimensionali. Il problema originario, in dimensione 3, rimaneva tuttavia senza soluzione e, anzi, sembrava costituire un caso a sé stante, una singolarità.

Opera di KangHee Kim.

Un significativo passo in avanti fu compiuto da William Thurston sul finire degli anni Settanta. Questi congetturò che ogni varietà tridimensionale chiusa si possa scomporre in “pezzi elementari”, ciascuno dei quali ammette un’unica “struttura geometrica” in un elenco di otto possibili. Senza entrare nei dettagli tecnici, sarà sufficiente sottolineare che la nozione di struttura geometrica non è puramente topologica, ma ha a che fare con proprietà metriche, cioè relative alla misura di angoli e distanze. Non è difficile (relativamente parlando) dimostrare che la validità della congettura di geometrizzazione di Thurston implica la validità della congettura di Poincaré. Uno dei principali meriti dell’impostazione di Thurston fu quello di ampliare enormemente l’arsenale di tecniche di cui i matematici si potevano servire per attaccare il problema della classificazione delle varietà tridimensionali: non soltanto strumenti topologici, ma anche metodi di geometria differenziale. Agli inizi degli anni Ottanta il matematico statunitense Richard Streit Hamilton introdusse l’idea di studiare la struttura geometrica di una varietà mediante una particolare equazione differenziale alle derivate parziali, detta “flusso di Ricci”. In parole povere, si potrebbe dire che questa descrive l’evoluzione delle variazioni locali della curvatura (la curvatura misura localmente di quanto lo spazio in considerazione si discosti dall’essere euclideo).

È a questo punto della storia – una storia lunga un secolo e mezzo – che entra in scena Perel’man. Analizzando le soluzioni singolari del flusso di Ricci e usando un sofisticato procedimento topologico (detto “chirurgia”), il matematico russo, in una serie di tre articoli messi in rete tra il 2002 e il 2003 (e in seguito mai pubblicati, però, in nessuna rivista scientifica), riuscì a dimostrare la congettura di geometrizzazione di Thurston e dunque, come caso particolare, anche la congettura di Poincaré. La comunità scientifica – grazie soprattutto al lavoro di sistemazione compiuto da Bruce Kleiner e John Lott e da John Morgan e Gang Tian – impiegò circa tre anni per verificare la sostanziale correttezza e completezza del risultato di Perel’man. Quest’ultimo, tuttavia, si rifiutò di collaborare in alcun modo all’opera di controllo e revisione, chiudendosi in un ostinato silenzio. La situazione, già di per sé fuori dalla norma, rischiò di degenerare del tutto, quando, nell’estate del 2006, i matematici cinesi Zhu Xiping e Cao Huaidong pubblicarono un articolo molto dettagliato in cui si attribuivano il merito di aver fornito la prima dimostrazione esaustiva della congettura di Poincaré, basandosi – ammettevano – sulla “teoria di Hamilton-Perel’man”. Dopo un gran subbuglio iniziale, il mondo matematico reagì con un quasi unanime coro di scandalizzate proteste, che convinse Zhu e Cao a ritrattare la loro pretesa di priorità e a postare su arXiv una versione emendata dell’articolo.

Il 22 agosto del 2006, a Madrid, durante l’International Congress of Mathematicians, a Perel’man fu assegnata la medaglia Fields, sebbene fosse già noto agli organizzatori che non l’avrebbe accettata né si sarebbe presentato: “Non sono interessato ai soldi o alla fama – aveva detto –; non voglio essere messo in mostra come un animale allo zoo. Non sono un eroe della matematica”. Quattro anni più tardi rifiuterà anche il premio da un milione di dollari del Clay Institute.

Parliamo ora, brevemente, dell’impostazione complessiva di questo libro. Solo un capitolo su undici tratta, in maniera peraltro assai superficiale, degli aspetti matematici della congettura di Poincaré (definita nel sottotitolo “the mathematical breakthrough of the century”, il che non è vero). I restanti capitoli raccontano la vicenda umana di Perel’man – la sua formazione, la sua carriera di matematico professionista fino alla famosa dimostrazione, la sua “follia” (così, incredibilmente, è intitolato il penultimo capitolo) – e offrono una descrizione dell’ambiente matematico e, più in generale, accademico dell’Unione Sovietica (solo marginalmente di quello della Russia *post* 1991). Data l’impossibilità di ottenere informazioni dal protagonista stesso della storia, è innegabile che l’autrice abbia svolto un lavoro certosino nel ricostruire il puzzle della sua biografia assemblando le testimonianze e le opinioni di vari personaggi, intervistati tanto in Russia, quanto negli Stati e in altri parti del globo. Sono efficaci le pagine dedicate alla scuola speciale di San Pietroburgo (all’epoca, Leningrado) istituita per preparare giovani talenti matematici (o presunti tali) in vista

di competizioni nazionali e internazionali (come le Olimpiadi internazionali di matematica), e altrettanto incisive quelle che documentano le pesanti discriminazioni subite dagli studenti di origine ebraica. Ma il quadro d'insieme rimane sfocato: il lettore, soprattutto se ha poca familiarità con gli argomenti trattati, vorrebbe saperne di più. Come si spiegano, nonostante tutte le aberrazioni, i notevoli risultati della scuola matematica russa (otto medaglie Fields tra il 1970 e il 2016)? I campioni delle Olimpiadi internazionali di matematica sono sempre ricercatori di successo? Quali sono i contributi scientifici di rilievo di personaggi quali Andrej N. Kolmogorov, Aleksandr D. Aleksandrov, Misha Gromov o John Morgan, dei quali Masha Gessen offre tutt'al più ritratti appena abbozzati, che talvolta sfumano nel macchiettistico? Risponde al vero l'affermazione che "l'attuale comunità dei matematici occidentali agisce come una corporazione" e "a volte ricorda più una famiglia che sacrifica i propri ideali e principi, pur di creare una storia comune e una dipendenza reciproca tra i suoi membri"? (a me, che pure faccio parte di questa comunità da oltre trent'anni, non risulta niente di simile).

Ciò che soprattutto non convince – e anzi, irrita – è l'insistenza di Masha Gessen nel dipingere Perel'man come un caso clinico. Sottolinea a più riprese la sua trascuratezza nel vestire, la sua eccentricità, lo descrive come "rigido, esigente, ipercritico" (quasi queste non fossero caratteristiche, o meglio doti, comuni alla maggior parte degli studiosi di buon livello), lo definisce nientemeno che "la mente più veloce della sua generazione in Unione Sovietica, e probabilmente nel mondo intero, capace di risolvere qualsiasi problema", arriva addirittura a diagnosticargli una probabile sindrome di Asperger.

Nessun biografo rispettabile, ma soltanto un autore di feuilleton, calcherebbe i toni in questo modo, e meno che mai si domanderebbe "che cosa c'è nella mente" del suo personaggio. Provate a immaginare una biografia di Newton, o di Hitler, o di Proust in questo stile, zeppa di considerazioni tanto irrilevanti quanto gratuite: sarebbe risibile. Quanto alla decisione di Perel'man di abbandonare la matematica, questa – è scontato dirlo – va rispettata come libera scelta individuale. D'altronde non mancano i precedenti, il più illustre dei quali è certamente quello di Alexander Grothendieck. Le ragioni della sua scelta, Grothendieck le ha illustrate in quegli straordinari testi che sono *Récoltes et semailles* e *La clef des songes*. Perel'man ha invece preferito, almeno finora, non spiegare a nessuno il perché abbia deciso di ritirarsi a vita privata (sempre che sia davvero così).

È del tutto lecito, ovviamente, non avere alcun interesse o inclinazione per la matematica. Ma offrirne un'immagine grottescamente distorta, e presentare i matematici secondo il cliché abusatissimo dello "scienziato folle", penso non serva a granché.

Se continuiamo a tenere vivo questo spazio è grazie a te. Anche un solo euro per noi significa molto.
Torna presto a leggerci e SOSTIENI DOPPIOZERO

Masha Gessen

Perfect Rigor

Storia di un genio e della più grande conquista matematica del secolo